Лекция 8. Терезелік Фурье түрлендіруі. Толқынды түрлендіру.

Терезелік Фурье түрлендіру үшін терезелік фаункция қарастырылады

$g(t) : \mathrm{supp}\, g(t) \subset [-\Omega, \Omega]$.

Терезелік Фурье түрлендіру дегеніміз келесі функциянын түрлендіруі

$\hat{f}_{ok} = F\big(f(x) \cdot g(x - x_0)\big)$.

терезелік фаункция көбінесе x_0 нүктенің төңірегінде шоғырланған функция болады.

Жалпы жағдайда келесі түрдегі функциялардын Фурье түрлендіруі қарастырылады

$g^{\omega,x0} \cdot f(x) = f(x)e^{i\omega x} g(x - x_0)$:

$$(T_{ok} f)(\omega, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i\omega x) g(x - x_0) dx$$

Көп жағдайда $\omega = m\,\omega_0$, және $x_0 = nt_0$, $(T^{OK}f) = (T^{OK}f)_{m,n}$.

Фурье түрлендірудің кемшіліктері:

Түрлі жиіліктер үшін терезелік функция түрлі болуы қажет, бұл кемшілік вейвлет түрлендірі арқылы жойылады.

Вейвлет туралы ұғым.

Егер ψ(t) функциясы кеңістікте шоғырланса, ол «аналық вейвлет» құрайды. Мысалы, $\psi(t)=1/(1+|t|^{1+\alpha})$ функциясы.

$\psi(t)=(1-t^2)\exp(-t^2/2)$ ең алғашқы практикада қолданған вейвлет.

a,b параметрлер енгізіп ψ((t-b)/a) функцилар жиынын аламыз

Вейвлеттерге қойылатын талаптар:

1. ψ(t), және ψ((t-b)/a) $L_2(R)$ жатады.
2. $\|\psi\|_{L_2} = 1$ болсын, және ψ((t-b)/a) нормалансын:

$$\left\|\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi\left(\tfrac{t-b}{a}\right)\right|^2 dt = \left|\frac{t-b}{a} = s, dt = ads\right| = a\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(s)|^2 ds = a\|\psi\|^2$$

Онда вейвлет $\psi^{a,b} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\tfrac{t-b}{a}\right)$

Вейвлет қасиеттері:

1. Шоғырлану (локалдану) – жиілік немесе кеңістікте шоғырлануы қажет в (ψ(t) немесе $\hat{\psi}(t)$ функциялары).
2. Масштабтаудағы инварианттылық . Егер а-нын орынына а/2 алсақ, онда кеңістікте ξ→2ξ.
3. ψ(t) $L_2(R)$ жатады.
4. $\int_0^{\infty} \frac{|\psi(\xi)|}{|\xi|} d\xi < \infty$
5. Вейвлет-түрлендіруді дифференциалдау ережесі.
6. Парсеваль теоремасының аналогы.

Анықтама. f функцияның үздіксіз вейвлет-түрлендіруі :

$$\left(T^{\text{вейв}} f\right)_{a,b} = \left\langle f, \psi^{a,b} \right\rangle \text{ или } \left(T^{\text{вейв}} f\right)_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi\left(\tfrac{x-b}{a}\right) dx$$